Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Приложна математика и моделиране”

“Компютърни числени методи”
ЛЕКЦИЯ 10

Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, snow@uni-plovdiv.bg

Он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

Литература:

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

Съдържание

Числени методи за обикновени диференциални уравнения (ОДУ) - продължение

1. Методи на Рунге-Кута

Тези методи също са едностъпкови, могат да са явни или неявни. Решава се задачата на Коши:

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. , \quad x \in [x_0, b]. \qquad (1)$$

Отново в интервала $[x_0, b]$ се и избират n точки: $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$. Най-често точките са равномерно отдалечени, т.е. изчислява се стъпка $h = (b - x_0)/n$ и точките се намират по формулата: $x_i = x_0 + ih,\ \ i = 0, 1, 2, ..., n$. Тогава $x_1 - x_0 = h,\ \ x_2 - x_1 = h, ...$

Новата, разширена идея спрямо методите на Ойлер е, че подобно на модифицирания метод на Ойлер, се избират няколко междинни точки във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$. Тези точки не е задължително да са равноотдалечени, а се избират така, че при оценка на грешката с помощта на формулите на Тейлър да се получава възможно най-висока степен s по h, т.е. локална грешка от вида $R(x_i) = O(h^s)$.

Най-известни формули на Рунге-Кута:

Формула (1,1):

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
\quad , \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (1,1)
$$

Може да се покаже, че локалната грешка е $R(x_i) = O(h^3)$, а глобалната за целия интервал - $r = O(h^2)$.

Формула $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: (подобна на модифициран метод на Ойлер)

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \quad , \quad i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$
$$y_{i+1} = y_i + k_2$$

Локалната грешка $R(x_i) = O(h^3)$, глобална - $r = O(h^2)$.

Формула $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1) \quad , \quad i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2$$

Локалната грешка $R(x_i) = O(h^3)$, глобална - $r = O(h^2)$.

Най-известен е следният метод на Рунге-Кута:

Формула с четири междинни точки:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad , \quad i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (2)$$

Локалната грешка $R(x_i) = O(h^5)$, глобална - $r = O(h^4)$.

Забележка. Не трябва да се забравя, че грешка от типа $R(x_i) = O(h^s)$ е валидна, ако съществува и е ограничена производна $y^{(s)}(x)$.

2. Метод на Рунге-Кута за системи ОДУ

Силата на числените методи е във възможността по един и същи алгоритъм да се намира приближеното решение на големи класове от задачи, например при произволен вид на десните части на уравненията или редът им.

Ще запишем как се трансформират формулите на Р-К за система ОДУ от 2 уравнения. Обобщението за произволен брой уравнения е аналогично.

Нека се решава началната задача за системата ОДУ:

$$\left|\begin{array}{l} y' = f(x,y,z), \\ z' = g(x,y,z), \qquad x \in (x_0, b) \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0 \end{array}\right. . \tag{3}$$

Формула (1,1) за случая на системата (3):

$$
\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), && l_1 = hg(x_i, y_i, z_i),\\
&k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1, z_i + l_1) && l_2 = hg(x_i + h, y_i + k_1, z_i + l_1)\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), && z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)
\end{aligned}
\quad , \quad i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (4)
$$

Локалната грешка е $R(x_i) = O(h^3)$, а глобалната за целия интервал е $r = O(h^2)$.

Пример: Да се реши по формула (4) уравнението:

$$
\begin{cases}
y'' = xy' + \sin(x.y^2 + y'), \qquad x \in (1,2)\\
y(1) = 2,\\
y'(1) = 1.
\end{cases}
$$

Това уравнение се привежда към система с полагането (виж лекция 9): $\boxed{y'(x) = z(x)}$:

Получаваме началната задача за система ОДУ:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = x.z + \sin(x.y^2 + z), \qquad x \in (1, 2] \\ y(x_0) = y_0, \quad x_0 = 1 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} .$$

За да приложим (4) е достатъчно тук да означим десните части така:

$$f(x, y, z) = z,$$

$$g(x, y, z) = x.z + \sin(x.y^2 + z) .$$

Формула с четири междинни точки за система (3):

$$
\left.
\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), && l_1 = hg(x_i, y_i, z_i),\\
&k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1\right), && l_2 = hg\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1\right),\\
&k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2\right), && l_3 = hg\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2\right),\\
&k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), && l_4 = hg(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3),\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), && z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).
\end{aligned}
\right\}, \quad i = 0,1,\dots,n-1 \qquad (5)
$$

3. Теорема за глобалната грешка при едностъпковите явни методи за ОДУ

Нека началната задача за ОДУ

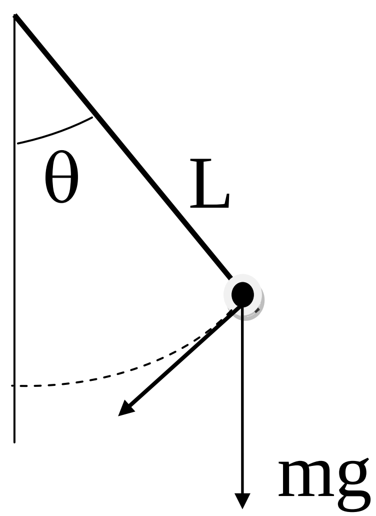
$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. , \quad x \in [x_0, b]. \qquad (6)$$

се решава с някакъв едностъпков явен метод (Ойлер, модифициран метод на Ойлер, Ойлер-Коши, Рунге-Кута или друг). Нека точното решение в точката x_i е означено с $y(x_i)$, а приближеното, получено по избрания метод - с y_i. Нека локалната грешка на метода в точката x_i с $r_i = |y(x_i) - y_i| = O(h^{p+1})$

Може да се покаже, че при изчисленията на $y_1, y_2, \dots, y_n$ локалната грешка се натрупва и глобалната грешка е:

$$\sum_{i=1}^{n} |r|_i \le Ch^p (x_n - x_0) = O(h^p).$$

<u>Задача:</u> Да се пресметне свободното колебание на махало в съпротивителна среда.



Махалото се състои от материална точка с маса m, окачена на безмасова неразтеглива нишка с дължина L.

Нека θ= θ(t) е ъгълът на отклонението от вертикалното положение, t – времето, a, b – константи, зависещи от L и теглото P=mg.

Уравнението, описващо θ(t) в зависимост от времето има вида:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + a\frac{d\theta}{dt} + b\sin\theta = 0, \qquad t \in [t_0, t_0 + A],$$ където

$\theta(t_0) = \theta_0$,

$\theta'(t_0) = \theta'_0$, θ_0 - начален ъгъл на отклонение, θ'_0- начална скорост.

Да се реши задачата при a=0.2, b=10, t_0=0, A=0.3 min, θ_0=0.5, θ'_0=0.

Това уравнение се привежда към система с полагането (виж лекция 9): $\boxed{\theta'(t) = u(t)}$. Получаваме системата ОДУ от вида (3):

$$\begin{cases} \theta' = u \\ u' = -0.2u - 10\sin\theta, \quad t \in [0, 0.3] \end{cases},$$

с начални условия: $\theta(0) = 0.5,\ u(0) = 0$

Тази система може да се реши числено по метода на Рунге-Кута, напр. по формули (4) или (5).

4. Мрежов метод за граничната задача за ОДУ

4.1 Опростена линейна гранична задача от втори ред:

Да се намери функцията $u(x)$, която удовлетворява обикновеното диференциално уравнение

$$u''(x) - q(x).u(x) = f(x), \qquad a \le x \le b \tag{7}$$

с гранични условия

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta \qquad \text{(гранични условия от първи род)} \tag{8'}$$

или

$$u'(a) - \alpha_1 u(a) = \beta_1,$$

$$u'(b) + \alpha_2 u(b) = \beta_2, \quad \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0 \ \text{(гр. условия от втори род)} \tag{8''}$$

Могат да се налагат и смесен тип гранични условия.

В сила е следната <u>теорема за съществуване и единственост на</u>

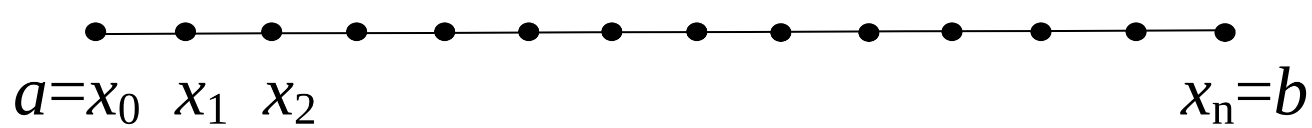
решението на опростената гранична задача:

> <u>Теорема:</u> Ако функциите удовлетворяват условията: $q(x) \geq 0$, $q(x) \neq 0$ и $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то съществува единствено решение на задача (7)- (8') или (7)- (8'').

Идея на мрежовия метод:

4.2 Апроксимация на интервала [a, b] с мрежа от точки.

За простота ще вземем равномерна мрежа от n на брой точки в интервала, със стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$. Получаваме мрежата: $\omega_h = \{x_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,n\}$.



Целта е да намерим приближените значения на решението $u(x)$ в тези точки. Ще означим търсените стойности с $u_k = u(x_k)$.

4.3 Апроксимация на уравнението (7).

Производната $u''(x)$ във всяка вътрешна точка x_k от мрежата ω_h представяме приближено с помощта на централната крайна разлика от втори ред:

$$\boxed{u''(x_k) \approx \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}. \tag{9}$$

Това се получава от точното развитие

$$u''(x_k) = \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(\mathrm{IV})}(\xi), \quad \xi \in (x_{k-1}, x_{k+1}) \tag{10}$$

където последният член е пренебрегнат и последното събираемо е грешката от апроксимация. В случая грешката е от порядъка на $O(h^2)$, при условия, че съществува четвъртата производна на $u(x)$ и е ограничена в интервала $[a, b]$.

Заместваме точките x_k и приближението (9) в уравнение (7) и получаваме търсената апроксимация на уравнението във вида:

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} - q(x_k)u_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (11)$$

с грешка на приближението: $O(h^2)$.

Извод на формула (10):

Развиваме в ред на Тейлър $u(x)$ около т. x_{k-1}, x_{k+1}:

$$u_{k-1} = u(x_k - h) = u(x_k) - h.u'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_k) + \frac{h^4}{4!}u^{(\mathrm{IV})}(\xi_1)$$

$$u_{k+1} = u(x_k + h) = u(x_k) + h.u'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_k) + \frac{h^4}{4!}u^{(\mathrm{IV})}(\xi_2)$$

където $\xi_1 \in (x_{k-1}, x_k), \quad \xi_2 \in (x_k, x_{k+1})$.

Като съберем двете равенства и изразим $u''(x_k)$, получаваме (10), с усреднено формално $\xi \in (x_{k-1}, x_{k+1})$.

4.4 Апроксимация на граничните условия (8') или (8'').

В случая на гранични условия от първи род (8'), виждаме, че при k=0 и k=n имаме съответно:

$$u_0 = \alpha\,, \quad u_n = \beta\,.$$

За приближаване на първата производна в гранични условия от втори род от типа (8'' използваме представянията:

при k=0:
$$u'(x_0) = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + O(h^2)\,,$$

при k=n:
$$u'(x_n) = \frac{u_{n-2} - 4u_{n-1} + 3u_n}{2h} + O(h^2)$$

Тези равенства се доказват подобно на извода на формула (10).

Като пренебрегнем грешките от порядъка на $O(h^2)$ и използваме (8') или (8''), получаваме окончателно:

За гр. усл. от първи ред:

$$u_0 = \alpha\,, \quad u_n = \beta\,. \tag{12'}$$

За гр.усл. от втори ред:

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} - \alpha_1 u_0 = \beta_1\,, \tag{12''}$$

$$\frac{u_{n-2} - 4u_{n-1} + 3u_n}{2h} + \alpha_2 u_n = \beta_2$$

Диференчна схема за граничната задача (7)- (8') или (7)- (8'')

Вместо изходната задача, за всяка точка от избраната мрежа $\omega_h = \{x_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,n\}$ след заместваме с приближенията (11)-(12') или (11)- (12'') и получаваме система алгебрични уравнения:

За задача (7)- (8'):

$$
\begin{aligned}
&u_0 = \alpha, && k = 0 \\
&\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} - q(x_k)u_k = f(x_k), && k = 1,2,\ldots,n-1 \\
&u_n = \beta && k = n
\end{aligned}
\qquad (11)\text{-}(12')
$$

За задача (7)- (8''):

$$\begin{aligned}
&\frac{-3u_0+4u_1-u_2}{2h}-\alpha_1 u_0=\beta_1, && k=0\\
&\frac{u_{k-1}-2u_k+u_{k+1}}{h^2}-q(x_k)u_k=f(x_k), && k=1,2,\dots,n-1\\
&\frac{u_{n-2}-4u_{n-1}+3u_n}{2h}+\alpha_2 u_n=\beta_2, && k=n
\end{aligned} \qquad (11)\text{-}(12'')$$

с грешка на приближението: $O(h^2)$.

Получените системи алгебрични уравнения се свеждат към системи с тридиагонални матрици и могат да се решават например с методa на прогонването. Получените решения са приближения за търсените стойности на решението $u(x)$ в т. $x_k \in \omega_h$.

Например диференчната схема (11)-(12') се представя във вида:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, & k = 0 \\ u_{k-1} - (2 + h^2 q(x_k))u_k + u_{k+1} = h^2 f(x_k), & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ u_n = \beta & k = n \end{cases}$$

или по-подробно, с ясно видим преобладаващ главен диагонал:

$$\begin{cases} u_0 & = \alpha \\ u_0 - (2 + h^2 q(x_1))u_1 + u_2 & = h^2 f(x_1) \\ \qquad \dots & \\ \qquad\qquad u_{k-1} - (2 + h^2 q(x_k))u_k + u_{k+1} & = h^2 f(x_k) \\ \qquad\qquad\qquad \dots & \\ & u_n = \beta \end{cases} \qquad (13)$$

Теорема. Може да се докаже, че при условията от апроксимацията на производните с грешка $O(h^2)$, получените стойности $\tilde{u}_k$ след решаване на диференчните схеми е също с грешка $O(h^2)$ спрямо точното решение на граничната задача $u(x_k)$ в избраните точки от мрежата, т.е.

$$\boxed{\max_k \left| u(x_k) - \tilde{u}_k \right| \le Mh^2}$$

където $M > 0$ е константа.

На практика, избирайки достатъчно гъста мрежа от точки в интервала [*a*, *b*], съответно – малка стъпка *h*, търсеното решение може да се намери с произволна зададена точност.

Към темата „Гранична задача от втори ред” е подготвен и пример със система Mathematica, за по-общ случай линейна гранична задача със смесени гранични условия от вида:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \qquad a \le x \le b \tag{14}$$

$$u'(a) = \alpha u(a) + \beta, \quad u(b) = \gamma \quad \text{(смесени гр. условия)} \tag{15}$$

Решеният пример може да се намери в сайта на Европейската виртуална лаборатория, ФМИ:

http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/numan/ODU/mesh_method%20ODE/mesh_methodmixte.html